

Übungen zu Meteorologische Modellierung Teil 'Grundlagen der Numerik'

4 Diskretisierung in Raum und Zeit: Die nichtlineare Advektions- und Transportgleichung (unviskose und viskose Burgers-Gleichung)

Kurzzusammenfassung

Bisher wurde die numerische Behandlung der Advektion (in Verbindung mit Diffusion) am Beispiel der linearen Advektionsgleichung (bzw. Transportgleichung) behandelt. Es wurden Verfahren und Bedingungen diskutiert, die gewährleisten, dass numerische und analytische Lösung einander benachbart bleiben, also numerische Stabilität herrscht. Zusätzlich wurden Amplituden und Phasenfehler einzelner numerischer Verfahren untersucht.

Geht man nun zu den nichtlinearen Gleichungen über, so ergeben sich neue Herausforderungen. So kann es (bei der Gitterpunktmethode), trotz der Verwendung eines im linearen Fall stabilen Verfahrens, vorkommen, dass die numerische Lösung 'explodiert'. Ursache ist die nichtlineare Wechselwirkung zwischen Phänomenen auf unterschiedlichen räumlichen Skalen (Wellen-Wellen Wechselwirkung), die zu Umverteilung von Energie im räumlichen Spektrum führt. Dies, die damit verbundenen numerischen Probleme sowie geeignete Lösungsverfahren sollen anhand der nichtlinearen Advektionsgleichung (unviskose Burgers-Gleichung) diskutiert werden. Eine wichtige Erweiterung ergibt sich mit der nichtlinearen Transportgleichung (viskose Burgers-Gleichung), die eine häufig verwendete Testumgebung für numerische Verfahren darstellt.

Die nichtlineare Advektionsgleichung (unviskose Burgers-Gleichung)

Untersucht werden soll hier die eindimensionale nichtlineare Advektionsgleichung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

(auch unviskose Burgers-Gleichung genannt). Diese Gleichung hat die analytische Lösung $u(x,t)=f(x-ut)$, wobei f eine beliebige Funktion ist. Auch wenn diese Lösung zunächst wie die der linearen Advektionsgleichung erscheint, so ist zu bemerken, dass f selbst wiederum eine Funktion von u ist, es sich also um eine implizite Gleichung für u handelt. Eine 'praktische' Lösung lässt sich nur für wenige Fälle finden.

Eine 'formale' (geometrische) Lösungsmöglichkeit bietet die Methode der Charakteristiken: Hierbei wird von der Lagrangen Betrachtungsweise Gebrauch gemacht:

$$\frac{du}{dt} = 0$$

D.h. die Geschwindigkeit u bleibt für jedes Teilchen (Punkt) zeitlich konstant. Die Pfade (Charakteristiken) der Teilchen sind also Geraden mit der Steigung $u(x_0, t=0)$:

$$x = x_0 + u(x_0, t=0) t$$

Wobei $u(x_0, t=0)$ die Geschwindigkeit u zum Zeitpunkt $t=0$ für den Startpunkt x_0 eines Teilchens bezeichnet. Da $u(x_0, t=0)$ i.a. im Raum variiert, schneiden sich zwei Charakteristiken nach einer bestimmten Zeit t_c . Es kommt somit zum Aufbau von Diskontinuitäten (Schock-Wellen) und nach dem Zeitpunkt t_c kann ein Teilchen mehr als

einen Aufenthaltsort haben, was als unphysikalisch zu verwerfen ist. Eine physikalisch sinnvolle Lösung kann damit nur bis t_c angegeben werden.

Dieses Verhalten der Lösung wird durch den nichtlinearen Term bestimmt, dessen Effekt nun (an einem Beispiel) näher untersucht werden soll: Wir nehmen (der Einfachheit halber) an, dass die x -Abhängigkeit von u zu jeder Zeit durch eine Sinus-Reihe gegeben ist, also:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right)$$

mit der Wellenzahl n , der zeitabhängigen Amplitude $U_n(t)$ und der Länge des Grundintervalls L . Nach Einsetzen in Gleichung (1) ist zu erkennen, dass sich jeweils Wechselwirkungen zwischen zwei Wellen n_1 und n_2 ergeben, die zu zeitlichen Änderungen von u in den Wellenzahlen n_1+n_2 und n_1-n_2 führen, da

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} U_{n_1} \sin\left(\frac{2\pi}{L} n_1 x\right) \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{2\pi}{L} n_2 U_{n_2} \cos\left(\frac{2\pi}{L} n_2 x\right) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{2\pi}{L} n_2 U_{n_1} U_{n_2} \sin\left(\frac{2\pi}{L} n_1 x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L} n_2 x\right) \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\pi}{L} n_2 U_{n_1} U_{n_2} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{L} (n_1 + n_2) x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L} (n_1 - n_2) x\right) \right) \end{aligned}$$

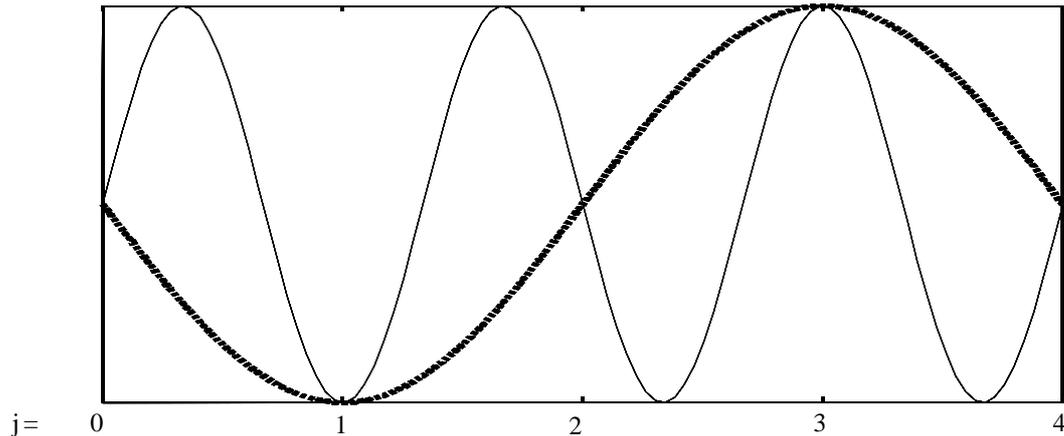
Es findet also durch die Nichtlinearität ein Transport von Impuls und Energie zwischen den einzelnen Teilen des Wellenspektrums statt. Bisher nicht vorhandenen Wellen-Moden können entstehen. Diese Eigenschaft der nichtlinearen Advektionsgleichung beeinflusst auch die numerischen Verfahren, wie nun an der Gitterpunktmethode (Finite Differenzen) und der spektralen Methode gezeigt wird.

Finite Differenzen (Gitterpunktmethode)

Ist die x -Achse, wie bei der Diskretisierung mit Gitterpunktmethode üblich, durch Punkte unterteilt und die Funktionswerte nur an diesen Punkten definiert, können nur Wellen bis zu einer bestimmten Länge $L/n = 2\Delta x$ repräsentiert werden. Sei u an den Punkten $0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, j\Delta x, \dots, M\Delta x$ (M gerade) definiert, dann geht die Sinus-Reihe über in

$$u = \sum_{n=1}^{M/2} U_n(t) \sin\left(\frac{2\pi}{M} nj\right) \quad \text{mit } L = M\Delta x$$

Die Wellenlänge ist allgemein durch $\lambda = L/n = M/n \Delta x$ gegeben. Sie beträgt für die längste Welle ($n=1$) $\lambda = M \Delta x$ und für die kürzeste, noch auflösbare Welle ($n=M/2$) $\lambda = 2 \Delta x$. D.h. Wellenzahlen $n > M/2$ ($\lambda < 2\Delta x$) kann das Gitternetz nicht adäquat beschreiben. Sie erscheinen vielmehr durch 'Schwebung' als falsch interpretierte längere Wellen. Beispiel (s. Abbildung 1): Sei z.B. $M=4$, $n=3$, d.h. $\lambda = 4/3\Delta x$, dann wäre diese Welle durch $\sin(6\pi/4 j)$ gegeben (durchgezogene Kurve). Da die Werte aber nur an den Gitterpunkten $j=0, \dots, 4$ bekannt sind, wird eine Welle $\sin(2\pi/4 j)$ vorgetäuscht (also $n = 1$; gepunktete Kurve).



Allgemein: Die nichtaufgelöste Welle ($n_F > M/2$) sei durch $n_F = M/2 + n^*$ mit $n^* = 1, 2, \dots$ gegeben, dann wird

$$\sin(2\pi/M n_F j) = \sin(2\pi j - (2\pi j - 2\pi/M n_F j)) = -\sin(2\pi/M (M/2 - n^*)j)$$

Die fiktive Wellenzahl der 'Schwebung' ist also

$$n_A = M/2 - n^* = M - n_F$$

Es findet damit eine Spiegelung der Wellenzahl n^* um die Grenzwellenzahl $M/2$ ('Nyquist-Frequenz') statt. Dieser Effekt der falschen Interpretation von kurzen Wellen wird Aliasing genannt (die fiktive Wellenzahl n_A Alias-Frequenz)

In Hinblick auf die numerischen Lösungen ist der wesentliche Punkt, dass bei jedem Zeitschritt neue Wellen der Wellenzahl $n_1 + n_2$ produziert werden (s. oben). Diese können möglicherweise nicht aufgelöst werden und werden so als Welle der Wellenzahl n_A interpretiert, was besonders im kurzwelligigen Bereich des Spektrums zu einer Akkumulation von Wellenenergie führen kann. Dies kann dann (auf längere Sicht) zur 'Explosion' der numerischen Lösung führen. Dieser Effekt wird nichtlineare Instabilität genannt.

Gegen die nichtlineare Instabilität hilft keine Reduzierung des Zeitschritts und der Gitterpunktabstände. Im Wesentlichen sind zwei Gegenmaßnahmen gebräuchlich: Zum einen können kürzere Wellen genügend stark gedämpft oder gänzlich eliminiert werden. Dies kann entweder durch eine zusätzliche Diffusion, z.B. der Form $A\partial^2 u/\partial x^2$ ($A > 0$; Diffusionskoeffizient), erfolgen, oder durch ein Differenzenverfahren, das automatisch eine Glättung bewirkt (z.B. upstream, Lax-Wendroff-Verfahren). Vollständig eliminiert können kurze Wellen dadurch werden, dass eine Fourier-Transformation durchgeführt wird, kurze Wellen herausgeworfen werden und die übrigen Glieder wieder zusammengesetzt werden. Der Nachteil aller dieser Methoden ist, dass Energie aufgezehrt wird, während nach Gleichung (1) die Energie erhalten bleibt, da nach (1)

$$u \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial t} = -\frac{1}{3} \frac{\partial u^3}{\partial x}$$

und damit (bei sinnvollen Randbedingungen)

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{L} \int_0^L u^2 dx = -\frac{1}{L} \int_0^L \frac{\partial u^3}{\partial x} dx = 0 \quad (2)$$

Zwar wirkt in der Atmosphäre Reibung und es erscheint damit zunächst einmal sinnvoll, sie auch in den Gleichungen mitzuführen, allerdings muss zumeist der Reibungskoeffizient A deutlich größer als in der Natur vorgegeben werden, um der nichtlinearen Instabilität entgegenzuwirken.

Ein anderer (besserer) Weg verwendet eine spezielle Differenzenform der nichtlinearen Glieder, die die Integraleigenschaften (2) exakt erfüllt. In diesem Fall kann die Energie (als Integral) zeitlich nicht anwachsen und damit auch keine Instabilität auftreten. So lässt sich der nichtlineare Term in Gleichung (1) in Differenzenform sowohl als

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_j (u_{j+1} - u_{j-1})}{2\Delta x}$$

als auch als

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right)_j = \frac{u_{j+1} u_{j+2} - u_{j-1} u_{j-2}}{6\Delta x} \left(= \frac{1}{3} \left(\frac{u_j (u_{j+1} - u_{j-1})}{2\Delta x} + \frac{u_{j-1} (u_j - u_{j-2})}{2\Delta x} + \frac{u_{j+1} (u_{j+2} - u_j)}{2\Delta x} \right) \right)$$

schreiben (also als gleich gewichtetes Mittel von drei Advektions-Termen). Der Vorteil der zweiten Form ist, dass hier die Erhaltungseigenschaft (2) bestehen bleibt (bei geeigneten (z.B. zyklischen) Randbedingungen), was durch die erste Form i.a. nicht gegeben ist. Damit stellt die zweite Schreibweise die Konstanz der Energie im Integrationsgebiet und damit die numerische Stabilität (in Hinblick auf die nichtlineare Instabilität) sicher. Hierbei ist jedoch immer zu bedenken, dass die falsche Interpretation von nichtaufgelösten Wellen nicht behoben ist und es so zu 'unphysikalischen' Lösungen kommen kann.

Zur Lösung der kompletten Gleichung können dann Verfahren wie Euler

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -\frac{u_{i+1}^n u_{i+2}^n - u_{i-1}^n u_{i-2}^n}{6\Delta x}$$

oder Leapfrog

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{u_{i+1}^n u_{i+2}^n - u_{i-1}^n u_{i-2}^n}{6\Delta x}$$

verwendet werden. Allerdings ist hier zu bemerken, dass die Energy doch (leicht) zunimmt, bedingt durch die Diskretisierung in der Zeit. Beide Verfahren sind somit schwach instabil und können in diesem Fall nicht über ein beliebig langes Integrationsintervall verwendet werden.

Die spektrale Methode

Ausgangspunkt für die spektrale Methode ist die Darstellung der prognostischen Variable durch eine orthogonale differenzierbare Basis (im Raum), in diesem Fall eine Fourier-Reihe:

$$u(x,t) = \sum_{k=-N}^N u_k(t) \exp(ikx)$$

Einsetzen in die Advektionsgleichung und Umformung ergibt folgende Gleichung

$$\sum_{k=-N}^N \frac{\partial u_k}{\partial t} \exp(ikx) = \sum_{k=-2N}^{2N} F_k \exp(ikx) \quad L_1 = \max(-N, k-N); \quad L_2 = \min(N, k+N)$$

mit den Wechselwirkungskoeffizienten F_k

$$F_k = -i \sum_{l=L_1}^{L_2} (k-l) u_l u_{k-l}$$

Es ist zu ersehen, dass durch die nichtlineare Wechselwirkung (wie oben beschrieben), nicht nur die aufgelösten Wellen (Wellenzahlen $-N$ bis N) sondern auch nichtaufgelöste Wellenzahlen bis zur doppelten Wellenzahl angeregt werden. Teilt man die rechte Seite in einen aufgelösten und einen nichtaufgelösten Teil, d.h.

$$\sum_{k=-2N}^{2N} F_k \exp(ikx) = \sum_{k=-N}^N F_k \exp(ikx) + \sum_{N < |k| \leq 2N} F_k \exp(ikx)$$

und vernachlässigt man Letzteren, so ergibt sich ein System von $2N$ gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen zur Bestimmung der zeitabhängigen Fourieramplituden u_k :

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = F_k = -i \sum_{l=L_1}^{L_2} (k-l) u_l u_{k-l}$$

dieses Gleichungssystem kann dann mit den bekannten Methoden gelöst werden.

Die Vernachlässigung der nichtaufgelösten Wellen verhindert das aliasing, jedoch bewirkt es auch, dass in den neuen (numerischen) Gleichungen nur noch Momente bis zu Ordnung u^2 erhalten sind und nicht mehr (wie in der Originalgleichung) alle Momente von u .

Die Transformationsmethode

Beim Vergleich der spektralen Methode und den finite Differenzen finden sich für Beide Methoden Vor- und Nachteile. Bei der spektralen Methode wird räumliche Ableitung exakt gelöst. Dafür ist sie jedoch aufwändiger, da für jede Wellenzahl die Summe aller Wechselwirkungskoeffizienten berechnet werden muss ($O(N)$ Terme). Der Aufwand der spektralen Methode in Abhängigkeit von der Auflösung ergibt sich so zu N^2 . Für die finiten Differenzen ist der Aufwand eine Größenordnung kleiner ($O(N)$, an jedem Gitterpunkt wird nur ein Term berechnet), jedoch wird die räumliche Ableitung nicht exakt bestimmt.

Die Vorteile beider Methoden lassen sich durch die Transformationsmethode (oder spektrale Transformationsmethode) kombinieren. Hierbei werden die linearen Terme und die räumlichen Ableitungen im Spektralraum bestimmt, während nichtlineare Terme im Gitterpunktraum berechnet werden. zu jedem (Zeit) Rechenschritt werden dann (mithilfe einer Fast Fourier Transformation) die entsprechenden Variablen (Terme) vom Spektralraum in den Gitterpunktraum und umgekehrt transferiert. Für die nichtlineare Advektionsgleichung kann ein Zeitschritt der Transformationsmethode wie folgt aussehen:

Ausgangsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

1. Transformation von u in den Gitterpunktraum
2. Berechnung von u^2 an jedem Gitterpunkt
3. Transformation von u^2 in den Spektralraum
4. Berechnung der x -Ableitung von u^2 im Spektralraum und Berechnung der neuen u

Die nichtlineare Transportgleichung (viskose Burgers-Gleichung)

Erweitert man die nichtlineare Advektionsgleichung um einen Diffusionsterm so erhält man die viskose Burgergleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Diese Gleichung findet Verwendung bei der Beschreibung vieler naturwissenschaftlich technischer Probleme (z.B. der Beschreibung von Verkehrsfluss und Stau). Zusätzlich ist sie eine wichtige Gleichung für die Erprobung neuer (und alter) numerischer Verfahren.

Zwar gelingt es mithilfe der Cole-Hopf Transformation eine 'formale' analytische Lösung der viskosen Burgers-Gleichung zu berechnen, und auch einige spezielle Lösungen sind bekannt, dies ist aber zumeist für die Praxis wenig hilfreich. Numerische Lösungen der viskosen Burgers-Gleichung können mit den bisher vorgestellten Verfahren (spektral, Gitterpunkte, Euler, Leapfrog, etc.) berechnet werden. Auch hier muss natürlich auf (lineare und nichtlineare) Instabilitäten geachtet werden.

Aufgabe

Versuche Dich an der numerischen Lösung der Burgers-Gleichung (viskos und unviskos). Als erste Anwendung berechne das zeitliche Verhalten der einfachen Sinus-Welle der Wellenzahl 1 aus den Aufgaben zur linearen Advektionsgleichung.