Übungen zu Meteorologische Modellierung Teil 'Grundlagen der Numerik'

3 Diskretisierung in Raum und Zeit: Diffusions- und Transportgleichung

Kurzzusammenfassung

a) Die Diffusionsgleichung

Neben der Advektion spielt die Diffusion eine wichtige Rolle in vielen Problemen der Fluidmechanik. Die Diffusion beschreibt den Austausch von Impuls, Energie oder anderen Eigenschaften (z.B. Feuchte). Die Diffusionsgleichung ist eine parabolische Gleichung und hat, in einer Dimension und mit einem konstanten Diffusionskoeffizienten *K*, (für die Variable *T*) die Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

Als eine (von vielen) mögliche analytische Lösung ergibt sich eine gedämpfte Welle:

$$T = T_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\exp\left(-\frac{4\pi^2 Kt}{L^2}\right)$$

mit der Wellenlänge *L*.

Zur numerischen Lösung der Diffusionsgleichung kommen wiederum finite Differenzen oder die spektrale Methode zum Einsatz.

Spektrale Methode

Die Diffusionsgleichung eignet sich sehr gut für die spektrale Methode. Stellt man die Variable *T* als Fourier- (oder auf der Kugel als Kugelflächenfunktionskoeffizienten-) Reihe mit zeitabhängigen Amplituden da ($T(t,x)=T_0(t)exp(ikx)$) so geht die Diffusionsgleichung über in

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = -Kk^2 T_0$$

also in die bereits bekannte lineare Evolutionsgleichung für die Amplituden. Diese kann dann mit den dort verwendeten Methoden gelöst werden kann.

Finite Differenzen

Zunächst wird die zweifache räumliche Ableitung durch Differenzen ausgedrückt. Hier bietet sich die Diskretisierung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \to \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{(\Delta x)^2}$$

an, die sich aus der Addition der Taylor-Entwicklungen für $T(x+\Delta x)$ und $T(x-\Delta x)$ ergibt. *i* bezeichnet den jeweiligen Gitterpunkt.

Nun muss noch ein Verfahren zur numerischen Integration in der Zeit gewählt werden. Eine nähere Analyse zeigt, dass das Leapfrog Verfahren, welches ja bei der Advektionsgleichung sehr erfolgreich eingesetzt werden konnte, hier nicht zum Erfolg führt (wie bei der dissipativen Evolutionsgleichung). Besser geeignet ist das, für die Advektionsgleichung instabile, explizite Euler-Verfahren, dass auch Forward in Time Centered in Space (FTCS) Verfahren genannt wird:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - K\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(\Delta x)^2} = 0$$

Hierbei bezeichnet n den jeweiligen Zeitpunkt. Dieses Verfahren ist stabil unter der Stabilitätsbedingung

$$\frac{4K\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$$

die damit das Verhältnis von Zeitschritt und Gitterpunktsabstand beschränkt.

Auch das implizite Verfahren

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - K\frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

oder das Crank-Nicolson Verfahren

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} - g(K\frac{T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1}}{(\Delta x)^2}) - (1-g)(K\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(\Delta x)^2}) = 0$$

(mit $0 \leq g \leq 1$) können zum Einsatz kommen. Sie zeichnen sich wie immer durch bessere Stabilität und/oder Ordnung aber auch durch wesentlich aufwendigere Handhabung (simultanes Lösen großer linearer Gleichungssysteme) aus.

b) Die Transportgleichung

Die Kombination von (linearer) Advektion und Diffusion wird als Transportgleichung bezeichnet. In einer Dimension ergibt sich also mit konstanter Advektionsgeschwindigkeit u und Diffusionskoeffizient K:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u\frac{\partial T}{\partial x} + K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Die Transportgleichung ist damit eine parabolische Differentialgleichung 2. Ordnung. Wie in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt, zeigen numerische Verfahren unterschiedliches Stabilitätsverhalten bezüglich der Diffusions- und der Advektionsgleichung. So ist zum Beispiel das FTCS-Verfahren bei reiner Advektion immer instabil, kann aber durchaus zur Lösung der Diffusionsgleichung eingesetzt werden. Das Leapfrog-Verfahren hingegen eignet sich nicht für die Diffusionsgleichung, leistet aber sehr gute Dienste bei der Advektion. Basierend auf diesen Erfahrungen liegt ein ‚gemischtes' Verfahren nahe, das wie folgt lautet:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} + u\frac{T_{i+1}^{n} - T_{i-1}^{n}}{2\Delta x} - K\frac{T_{i+1}^{n-1} + T_{i-1}^{n-1} - 2T_i^{n-1}}{(\Delta x)^2} = 0$$

Hier wird die Advektion wie im Leapfrog Verfahren behandelt, während die Diffusion vorwärts in der Zeit (explizit) über $2\Delta t$ mit $T(t\text{-}\Delta t)$ als Ausgangspunkt integriert wird. Dieses Verfahren ist stabil unter der Bedingung

$$\Delta t \le -\frac{4K}{u^2} + \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{u^2} + \left(\frac{4K}{u^2}\right)^2} \quad \text{oder} \quad \Delta t \le \frac{(\Delta x)^2}{4K + \sqrt{(4K)^2 + (u\Delta x)^2}}$$

die damit wiederum Grenzen für das Verhältnis von Zeitschritt zu Gitterpunktsabstand liefert. Wie zu erwarten, liefern die Extreme $u=0$ und $K=0$ die bekannten Stabilitätsbedingungen für reine Diffusion und reine Advektion.

Es soll noch erwähnt werden, dass die Transportgleichung unter bestimmten Bedingungen für das Verhältnis von K zu u (zusammen mit Stabilitätskriterien für Δt und Δx) auch nur mit dem FTCS oder dem Leapfrog Verfahren gelöst werden kann. Auch andere Verfahren (explizites Upstream-Verfahren und das Lax-Wendroff-Verfahren) oder die spektrale Methode können eingesetzt werden.

Die Aufteilung des Problems in unterschiedliche Prozesse, die dann mit unterschiedlichen numerischen Verfahren gelöst werden, wird allgemein als time-splitting Methode bezeichnet und findet häufig Anwendung. So wird zum Beispiel in vielen Klimamodellen der adiabatische Teil mithilfe des Leapfrog Verfahrens behandelt, während implizite oder explizite Euler Verfahren für die Parameterisierungen der diabatischen Prozesse verwendet werden.

Aufgabe:
Erweitere das Programm zur numerischen Lösung der Advektionsgleichung zur numerischen Lösung der Transportgleichung.