

Übungen zu Meteorologische Modellierung Teil 'Grundlagen der Numerik'

2 Diskretisierung in Raum und Zeit: Die Advektionsgleichung

Kurzzusammenfassung

Verfahren zur Diskretisierung in Raum und Zeit sollen an der eindimensionalen linearen Advektionsgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

besprochen und ausprobiert werden. Hierbei ist T eine Eigenschaft (z.B. Temperatur) eines Partikels in einer Strömung mit (zeitlich und räumlich) konstanter Geschwindigkeit u in x -Richtung. u soll hier nicht von T abhängen. Diese Gleichung beschreibt die Verlagerung eines beliebigen Signals in T durch die Strömung u und ist Bestandteil vieler meteorologischer Gleichungen. Gleichung (1) kann analytisch gelöst werden: Als Lösung ergibt sich

$$T(x,t) = f(x-ut)$$

wobei f eine beliebige Funktion ist. Diese Lösungen umfassen auch propagierende Wellen

$$T(x,t) = T_0 \exp(i(kx-ct))$$

mit der Dispersionsrelation $c/k = u$, d.h. es handelt sich um nicht-dispersive Wellen mit Phasengeschwindigkeit u .

Will man Gleichung (1) numerisch lösen kommt zur im vorherigen Abschnitt behandelten Diskretisierung in der Zeit nun die numerische Behandlung der räumlichen Ableitung hinzu. Unterschiedliche Methoden werden verwendet, um die Advektion in numerischen Modellen zu behandeln: z.B. Spektrale Methode, finite Differenzen und semi-Lagrange Verfahren.

Die spektrale Methode

Bei der spektralen Methode wird die räumliche Ableitung nicht mit Hilfe von Werten auf einem diskreten Gitter (und deren Differenzen) approximiert, sondern durch eine alternative Darstellung der Variablen mit Hilfe orthogonaler Basisfunktionen analytisch bestimmt. Für Probleme auf einer Ebene (oder wie hier in einer Dimension) bieten sich die Darstellung in Fourier-Koeffizienten an (auf der Kugel werden Kugelflächenfunktions-Koeffizienten (Legendre-Polynome) verwendet). Also:

$$T(t, x) = \sum_{k=-N}^N \hat{T}_k(t) \exp(ikx)$$

eingesetzt in die Gleichung und analytische Berechnung der Ableitung ergibt dann:

$$\sum_{k=-N}^N \frac{\partial \hat{T}_k}{\partial t} \exp(ikx) + u \sum_{k=-N}^N ik \hat{T}_k \exp(ikx) = 0$$

Durch die Orthogonalität und der Tatsache das die Koeffizienten mit negativem k gleich den Komplexkonjugierten mit positiven k sind (bei reeler Funktion $T(x)$) erhält man so N Differentialgleichungen in der Zeit zur Bestimmung der Real- und Imaginärteile der einzelnen \hat{T}_k .

$$\frac{\partial \hat{T}_k}{\partial t} + iuk\hat{T}_k = 0$$

Diese Gleichung kann dann wiederum numerisch nach einem im Abschnitt ‚Evolutionsgleichung‘ gezeigten Verfahren gelöst werden. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass diese Verfahren andere Eigenschaften (z.B. bezüglich der Stabilität) haben können (s. Vorlesung). So ist zum Beispiel das explizite Verfahren immer instabil, das Leapfrog Schema jedoch stabil (neutral) bei geeignetem Zeitschritt.

Um aus den Fourierkoeffizienten ein physikalisches Feld zu erhalten, bzw. um aus einer Anfangsbedingung im physikalischen (x) Raum die entsprechenden Fourierkoeffizienten abzuleiten, wird eine Fouriertransformation (bzw. deren inverse) durchgeführt, zumeist wird eine 'schnelle Fouriertransformation' (FFT, Fast Fourier Transform) verwendet, für die es viele fertige Bibliotheksroutinen gibt (z.B. Numerical Recipies). Ist bei einer Gitterpunktmethode die räumliche Auflösung der Funktion T durch die Anzahl (d.h. den Abstand) der Gitterpunkte limitiert, so ist bei der spektralen Methode die räumliche Auflösung durch die Anzahl der verwendeten Koeffizienten (N) gegeben.

Finite Differenzen

Bei dieser Methode wird wie für die zeitliche Ableitung auch die räumliche Ableitung mit Hilfe von Differenzen auf einem diskreten Gitter dargestellt (deshalb wird auch häufig von Gitterpunkts-Methode gesprochen). Je nach dem welche Zeit- und Ortspunkte verwendet werden, unterscheidet man verschiedene Verfahren, von denen einige hier vorgestellt werden sollen:

a) Ein instabiles Verfahren (natürlich nicht für die Praxis gedacht)

Zunächst liegt es vielleicht nahe, die Zeitdiskretisierung explizit (Euler, s. Evolutionsgleichung) durchzuführen und die Ableitung im Raum durch sog. zentrierte Differenzen auszudrücken. Also:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

womit sich die 'neuen' Werte T_i^{n+1} (Zeitpunkt $n+1$) an jedem Gitterpunkt i aus den 'alten' Werten T_i^n am Gitterpunkt i selbst und an den beiden benachbarten Punkte ($i-1$ und $i+1$) berechnen lassen. Leider zeigt sich (wie unten gezeigt wird), dass dieses Verfahren immer (d.h. unabhängig von der Zeitschrittlänge und dem Gitterpunktsabstand) instabil und damit unbrauchbar ist.

b) Das Upstream-Verfahren

Beim Upstream-Verfahren wird die Ortsableitung mit Hilfe der stromaufwärts gelegenen Differenzen gebildet. Für $u > 0$ ergibt sich:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Wenn $u < 0$ muss das Upstream-Verfahren als

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta x} = 0$$

gebildet werden.

Es kann gezeigt werden (s.u.), dass dieses Verfahren dann stabil ist, wenn das sog. Courantkriterium (oder auch Courant-Friedrich-Lévy Kriterium)

$$Cr \equiv \frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

erfüllt ist, wobei Cr als Courantzahl bezeichnet wird. Der Abbruchfehler (d.h. die Abweichung von der wirklichen Lösung durch die Approximation der Differenziale durch Differenzen) hat für das Upstream-Verfahren die Ordnung $O(\Delta x, \Delta t)$.

c) Das Leap-Frog-Verfahren

Beim Leap-Frog-Verfahren wird der 'neue' Wert aus den zwei vorangegangenen Zeitpunkten berechnet. Für die horizontale Ableitung werden zentrierte Differenzen verwendet:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Dieses Verfahren hat einen Abbruchfehler $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$, ist also genauer als das Upstream-Verfahren. Das Courantkriterium lautet $Cr^2 \leq 1$. Die Berechnung des ersten Zeitschritts muss aber mit einem anderen Verfahren erfolgen. Da es beim Leap-Frog-Verfahren zu numerischen Schwingungen durch die Entkopplung der unterschiedlichen Zeitebenen kommen kann, wird es in der Meteorologie i.A. mit einem zusätzlichen Zeitfilter (z.B. Robert-Asselin Filter) verwendet, der eine schwache Verknüpfung der Zeitebenen darstellt:

$$T(t+\Delta t) = T^*(t-\Delta t) + 2\Delta t (dT/dt)$$

$$T^*(t) = T(t) + \gamma (T(t+\Delta t) + T^*(t-\Delta t) - 2T(t))$$

Mit der Filterkonstanten γ (typischerweise 0.1)

d) Das voll implizite Verfahren

In den bisher vorgestellten Verfahren, wurde die zeitliche Ableitung explizit behandelt, d.h. die zeitliche Entwicklung mithilfe der Werte zum 'alten' Zeitpunkt in der Advektion ermittelt. Natürlich kann auch die Advektionsgleichung implizit formuliert werden:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0$$

Wie bereits vom impliziten Verfahren bekannt, ist es unabhängig vom Zeitschritt stabil. Der Abbruchfehler ist hier $O(\Delta x^2, \Delta t)$. Der Nachteil des impliziten Verfahrens ist jedoch, dass nun die Gleichungen für die einzelnen Gitterpunkte nicht mehr entkoppelt sind, da zur Bestimmung eines 'neuen' Wertes an einem Gitterpunkt, die neuen Werte der umliegenden Punkte bereits bekannt sein müssen. Es gilt hier also simultan ein System von mehreren (so

viel wie Gitterpunkte) linearen Gleichungen zu lösen. Dies geschieht mithilfe von numerischen Methoden wie z.B. der Gauß-Jordan Elimination, die typischerweise aus vorhandenen Programmbibliotheken (wie den Numerical Recipes) entnommen werden. Diese Vorgehensweise ist natürlich deutlich aufwendiger als ein explizites Verfahren.

e) Das Crank-Nicolson-Verfahren

Im Crank-Nicolson-Verfahren werden implizite und explizite Behandlung kombiniert:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + Gu \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-G)u \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Mit Hilfe des Gewichts G kann hier zwischen implizit und explizit variiert werden. Für $G = 0.5$ hat es den Abbruchfehler $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$. Es ist für $G > 0.5$ numerisch stabil. Jedoch muss auch hier ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem gelöst werden.

f) Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Prädiktor-Korrektor-Verfahren berechnen die Lösung in zwei Schritten: In einem ersten (Prädiktor) Schritt wird eine stabile Anfangslösung erzeugt, die in einem zweiten (Korrektor) Schritt dann bezüglich des Abbruchfehlers verbessert wird. Als Beispiel sei hier das MacCormack-Verfahren genannt:

1. Prädiktor-Schritt (Upstream) :

$$\frac{\hat{T}_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

2. Korrektor-Schritt (Downstream, halber Zeitschritt):

$$T_i^{n+1} = \frac{T_i^n + \hat{T}_i^{n+1}}{2} - \frac{u\Delta t}{2} \frac{\hat{T}_{i+1}^{n+1} - \hat{T}_i^{n+1}}{\Delta x}$$

das Verfahren hat den Abbruchfehler $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$ und ist für $Cr \leq 1$ stabil.

Semi-Lagrange Verfahren

Semi-Lagrange Verfahren zählen wie die oben beschriebenen finiten Differenzen zu den Gitterpunkts-Verfahren. Während bei den oben beschriebenen Verfahren (sowohl finite Differenzen als auch spektrale Methode) die Advektion aus Euler'scher Sicht (lokale zeitliche Änderung und Advektion) betrachtet wird, gehen die semi-Lagrange Verfahren (wie der Name schon sagt) von der Lagrange'en Betrachtungsweise (also der substantiellen Ableitung) aus, also für den Fall reiner Advektion:

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

D.h. die Eigenschaft eines Teilchens (kleinen Volumens) ändert sich während der Advektion nicht. Beim semi-Lagrange Verfahren werden nun die Bahnlinien der Partikeln verfolgt um so die Information über T an einem Ort zu einem späteren Zeitpunkt zu erhalten. Die Verfahren werden hier 'semi-' Lagrange genannt, da letztendlich wiederum die Information über T an diskreten Gitterpunkten bestimmt und verwendet wird und die Eigenschaften der

individuellen Partikel nur als Hilfsmittel dienen (gelegentlich findet sich aber auch nur die Bezeichnung 'Lagrange-Verfahren').

In einem ersten Schritt wird die Bahnlinie eines Teilchens bestimmt, das zum Zeitpunkt $n+1$ am Gitterpunkt i ankommt (Rückwärts-Trajektorie). Dieses Teilchen ist zum Zeitpunkt t^n am Ort x_i^b (Basispunkt) gestartet. Zur Bestimmung von x_i^b wird die Gleichung der Bahnlinie integriert:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} u dt$$

hieraus folgt:

$$x_i^{n+1} - x_i^b = u \Delta t$$

und damit die Bestimmung des Basispunkts

$$x_i^b = x_i^{n+1} - u \Delta t$$

hat man zu jedem Gitterpunkt den Basispunkt bestimmt, gilt es dann den Wert für T an diesen Basispunkten zu ermitteln dieser Wert entspricht dann dem gesuchten T_i^{n+1} . Typischerweise (leider) fällt ein Basispunkt jedoch nicht mit einem Gitterpunkt zusammen und so muss T am Basispunkt aus den umliegenden Gitterpunkten interpoliert werden. Am einfachsten (und schnellsten) ist die lineare Interpolation. Angenommen, x_i^b liege zwischen den Gitterpunkten x_k und x_{k+1} , dann erhält man für $T(x_i^b)$

$$T(x_i^b) = T_i^{n+1} = T_k^n + \frac{x_i^b - x_k}{x_{k+1} - x_k} (T_{k+1}^n - T_k^n)$$

Natürlich ist der Fehler der hier durch die Interpolation gemacht wird relativ groß (s. u. numerische Diffusion). Genauere Ergebnisse lassen sich durch quadratische oder Interpolationen höherer Ordnung erzielen, für die wiederum bestehende Bibliotheksfunktionen (z.B. Numerical Recipes) verwendet werden können.

Randwerte

Hat man es bei der Evolutionsgleichung nur mit einem Anfangswertproblem zu tun (es muss in Wert T_0 zum Startzeitpunkt t_0 vorgegeben werden), so handelt es sich bei der Advektionsgleichung um ein Randanfangswertproblem. Neben Startwerten $T_0(x)$ an jedem Punkt x müssen, da bei realistischen Anwendungen das Modellgebiet nicht unendlich ausgedehnt ist, auch Werte an den Rändern vorgegeben werden. Typisch für meteorologische Anwendungen (besonders auf der globalen Skala) ist die zyklische Randbedingung, bei der der rechten Rand dem linken gleichgesetzt wird, d.h. was am Ausstromrand das Gebiet verlässt wird am Einstromrand zurück in das Modellgebiet gebracht. Bei nicht zyklischen Randbedingungen muss eigentlich nur am Einstromrand eine Randbedingung vorgegeben werden, am Ausstromrand werden keine Randbedingungen benötigt. Einige Verfahren (z.B. das Leap-Frog-Verfahren) benötigen jedoch auch stromabwärtige Gitterpunkte. Will man am Ausstromrand nicht ein anderes (z.B. upstream) Verfahren verwenden, so muss man auch am Ausstromrand eine Randbedingung einführen.

Praktisch geht man bei der Einführung von Randbedingungen in Gitterpunktmodelle meist so vor, dass zusätzlich zu den 'aktiven' Gitterpunkten im Modellgebiet (z.B. $i=1, \dots, N$) zwei weitere Gitterpunkte ($i=0$ und $i=N+1$) definiert werden, auf denen die jeweilige Randbedingung festgelegt wird. So wird zum Beispiel bei Verwendung zyklischer Randbedingungen zu jedem Zeitschritt $T(0)=T(N)$ und $T(N+1)=T(1)$ gesetzt.

Während zyklische Randbedingungen in spektralen Modellen bereits durch die Repräsentation der Variablen durch Fourier- oder Kugelflächenfunktionskoeffizienten verwirklicht sind, sind nichtzyklische Randbedingungen in diesen Modellen meist nur schwer zu realisieren.

Instabilität und numerische Fehler

Wie bereits bei der Evolutionsgleichung deutlich wurde, kann es passieren, dass numerische Verfahren, abhängig von der Wahl des Zeitschritts, nicht stabil sind, d.h. die numerische und die wirkliche Lösung divergieren. Dies ist auch bei der (linearen) Advektionsgleichung der Fall, wie hier gezeigt werden soll. Aber auch wenn ein Verfahren stabil ist, kommt es durch die Approximationen in Raum und Zeit i.A. zu Abweichung der Lösung im Vergleich zur Wirklichkeit. Zwei typische numerische Artefakte sind die numerische Dispersion und die numerische Diffusion.

Numerische Stabilität kann auf unterschiedliche Weise untersucht werden. Zwei bekannte Verfahren sind die Energie Methode und die von Neumann Methode. Bei der Energie Methode wird eine quadratische Größe (eine 'Energy') definiert und deren Verhalten mit der Zeit betrachtet. Wächst die Energy unbeschränkt an, so ist das Verfahren instabil. Die Energie Methode hat den Vorteil, dass sie auch für nichtlineare Systeme geeignet ist (bzw. die Nichtlinearitäten berücksichtigt), jedoch ist die Definition einer geeigneten Energy nicht immer trivial und die Lösung des nichtlinearen Problems zumeist schwierig. Bei der von Neumann Methode werden die linearisierten Gleichungen untersucht, die räumlichen Ableitungen mithilfe einer Fourierdarstellung dargestellt und das Anwachsen der prognostischen Variablen über einen Zeitschritt untersucht (Anwachsfaktor A). Ist $|A| \leq 1$, d.h. nimmt die Amplitude nicht mit der Zeit zu, so ist das Verfahren (linear) stabil. Der Vorteil der von Neumann Methode liegt in der einfachen Anwendbarkeit, der Nachteil in der Annahme der Linearität. Instabilitäten aufgrund der nichtlinearen Terme können nicht erfasst werden (s. nichtlineare Advektionsgleichung, Burgers-Gleichung). Die von Neumannsche Stabilitätsanalyse soll im Folgenden exemplarisch an zwei Fällen demonstriert werden.

Zunächst wird das 'instabile' Verfahren untersucht. Wie oben angegeben lautet hier die Differenzenform der Gleichung

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + u \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

woraus sich als Bestimmungsgleichung für das 'neue' T am Punkt i

$$T_i^{n+1} = T_i(t + \Delta t) = T_i(t) - u\Delta t \frac{T_{i+1}(t) - T_{i-1}(t)}{2\Delta x}$$

ergibt.

Setzt man für die Abhängigkeit in x-Richtung die Wellenlösung $T_i^n = T^n \exp(ikx)$ ein, so folgt

$$T(t + \Delta t) = T(t) - \frac{u\Delta t}{2\Delta x} T(t)(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x))$$

wobei $T(t)$ die zeitabhängige Amplitude der Welle ist. Unter Verwendung der Euler-Formel lässt sich dies umformen zu

$$T(t + \Delta t) = T(t)\left(1 - i \frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)$$

somit ergibt sich nach n Zeitschritten

$$T(t + n\Delta t) = T(t)\left(1 - i \frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)^n = T(t)\left(1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)\right)^{n/2} \exp\{-in \arctan\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)\}$$

Setzt man nun für $T(t)$ die analytische Wellenlösung für die Zeitabhängigkeit ein ($T(t) = \hat{T} \exp\{-ikct\}$ mit der Phasengeschwindigkeit $c = u$) ein und vergleicht die sich daraus ergebene Lösung für $T(t+n\Delta t)$ mit dem Ausdruck auf der rechten Seite der numerischen Lösung, so lässt sich folgendes feststellen:

1. Da der Faktor $\left(1 + \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sin^2(k\Delta x)\right)$ in der numerischen Lösung für alle Wellenzahlen $k > 0$ größer als 1 ist, nimmt die Amplitude der numerischen Welle mit der Zeit zu. Das Verfahren ist also (wie bereits vorweggenommen) instabil (und zwar für alle Zeitschrittlängen Δt).
2. Die Wanderung der numerischen Welle (die zeitlich abhängige Phasenlage) ergibt sich zu $n \arctan\left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)\right)$ im Gegensatz zu $kun\Delta t$ im analytischen Fall. Abgesehen davon, dass damit die Wanderungsgeschwindigkeit der numerischen Welle nicht der der Wirklichen entspricht, ist die numerische Phasengeschwindigkeit c_n auch noch von der Wellenzahl k abhängig. Es tritt also eine künstliche Dispersion auf. Für genügend lange Wellen (kleine k) ergibt sich nach Taylorreihenentwicklung c_n (Abbruch nach dem Glied 3. Ordnung in k und 1. Ordnung in Δt) zu

$$c_n = kun\Delta t \left(1 - \frac{k^2 \Delta x^2}{6}\right)$$

und damit das Verhältnis von numerischer zur analytischen (c_a) Phasengeschwindigkeit zu

$$\frac{c_n}{c_a} = \left(1 - \frac{k^2 \Delta x^2}{6}\right)$$

d.h. je kleiner die Wellen, desto langsamer wandern sie. Für die kleinste noch aufzulösende Wellenlänge ($2\Delta x$) ergibt sich (da $\sin(k\Delta x)$ dann 0) keine Wanderung der Welle mehr.

Führt man eine derartige Analyse für das Upstream verfahren durch, so erhält man, nach entsprechenden Umformungen folgendes Ergebnis:

1. das Verhältnis der Amplitude der numerischen Welle (A_n) nach n Zeitschritten zur analytischen Lösung (A_a) ist

$$\frac{A_n}{A_a} = \left(1 - \frac{2u\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos(k\Delta x) \left(1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x}\right))\right)^{n/2}$$

Das Verfahren ist damit mit der Courant Bedingung ($\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$) stabil (die Amplitude nimmt nicht mit der Zeit zu). Es ist aber zu sehen, dass die Amplitude für unterschiedliche k unterschiedliche stark gedämpft wird ($A_n/A_a < 1$), wobei die Dämpfung für lange Welle (kleine k) Schwächer ist als für kurze. Damit kommt es mit der Zeit zu einer Verbreiterung der Wellenberge (bei Superposition von mehreren Wellen) bei Abnahme der Amplitude, d.h. zu einer numerischen Diffusion.

2. Das Verhältnis von numerischer Phasengeschwindigkeit und analytischer Lösung ist

$$\frac{c_n}{c_a} = \frac{\arctan \left[\frac{\frac{u\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x)}{1 - \frac{u\Delta t}{\Delta x} (1 - \cos(k\Delta x))} \right]}{ku\Delta t} \approx 1 - (k\Delta x)^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \left(\frac{u\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \dots \right)$$

Auch hier entspricht die numerische Phasengeschwindigkeit i.A. nicht der Wirklichkeit, es tritt also numerische Dispersion auf.

Aufgaben

- (s. Übung 0): Schreibe ein FORTRAN Programm, das $T(x,t)$ für eine wandernde Welle der Wellenzahl 1 an NX (also $x=0, \Delta x, 2\Delta x, \dots, NX\Delta x$) Stützstellen berechnet. Verwende folgende Parameter: $NX=100, \Delta x=1., u=10$. Die Amplitude der Welle (T_1) sei 10. Das Programm soll die Zeitreihe $T(x,t)$ für $x=0$ und die Zeitpunkte $t=0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, 200\Delta t$ mit $\Delta t=1$. sowie $T(x,t)$ für $t=0$ und $t=199\Delta t$ (alle Stützstellen x) herausgeschrieben werden. Plote Die Zeitreihe und die Wellen (z.B. mit gnuplot).
- Berechne und plote die numerische Lösung der Wellenadvektion aus 1, bei zyklischen Randbedingungen. Verwende die Gitterpunktsverfahren Upstream und Leapfrog mit und ohne Asselin-Filter. Achtung: Überprüfe zunächst die numerische Stabilität und passe, bei Instabilität, den Zeitschritt Δt an.
- Ermittle experimentell den Amplituden und den Phasenfehler der beiden Verfahren aus 2. für die Wellenzahlen 1,2 und 10.
- Berechne und plote die numerische Lösung der Advektion eines 'Kastens' ($T(t=0)=10$ für $x \leq 50, 0$ sonst). Gleiche Verfahren, gleiches Gitter, etc. wie bei 2 und 3.
- Verwende das semi-Lagrange Verfahren (Rückwärts-Trajektorien, mit linearer Interpolation) zur numerischen Lösung der linearen Advektionsgleichung (gleiche Parameter wie in 2 und 4)