Übungen zu Meteorologische Modellierung Teil 'Grundlagen der Numerik'

0) Vorbereitung und FORTRAN

0a) Die Evolutionsgleichung

Kurzzusammenfassung
Zur Erlernung einiger Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung betrachten wir die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = -aT + F \qquad \textit{(Evolutionsgleichung, engl: decay equation)}$$

Sie stellt die zeitliche Entwicklung einer Größe *T* bedingt durch einen konstanten Antrieb *F* und einer linearen Dämpfung mit der Zeitkonstanten τ = *1/a* dar. Diese Gleichung kann analytisch gelöst werden: $T(t) = F/a + \Delta T \exp(-a\, t)$. Wobei F/a die Gleichgewichtslösung und ΔT die Abweichung des Anfangswerts T_0 ($=T(t_0)$) von der stationären Lösung sind. In späteren Untersuchungen wird die analytische Lösung verwendet, um numerische Verfahren zu beurteilen.

Aufgabe:
Schreibe ein FORTRAN Programm, das die analytische Lösung der Evolutionsgleichung (also *T(t)*) berechnet und eine Zeitreihe der Lösung für vorgegebene Parameter ausgibt. Verwende folgende Parameter: *F*=1., *a*=0.05 und T_0=0. Die Zeitreihe *T(t)* soll für die Zeitpunkte *t*=0, Δt, $2\Delta t, \ldots, 200\Delta t$ mit Δt =1. berechnet und herausgeschrieben werden. Plotte Die Zeitreihe (z.B. mit gnuplot).

0b) Die lineare Advektionsgleichung

Kurzzusammenfassung
Advektive Prozesse spielen eine wesentliche Rolle in der Strömungsmechanik, deshalb erfolgt der Einstieg in die numerischen Verfahren zur zeitlichen und räumlichen Diskretisierung anhand der eindimensionalen linearen Advektionsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x}$$

mit der (räumlich und zeitlich) konstanten Geschwindigkeit *u.* Auch diese Gleichung ist analytisch lösbar. Die Lösung ist gegeben durch *T(x,t)=f(x-ut)*, wobei *f* eine beliebige Funktion (des Arguments *(x-ut)*) ist. Hier soll *f* durch die Überlagerung von Wellen mit der Wellenzahl *k* (und Phasengeschwindigkeit *u*) sein. Also:

$$T(x,t) = \sum_k \mathrm{Re}\big(T_k \exp(ik(x-ut))\big)$$

Aufgabe:
Schreibe ein FORTRAN Programm, das *T(x,t)* für eine wandernde Welle der Wellenzahl 1 an *NX* (also *x*=0, Δx, $2\Delta x, \ldots, NX\Delta x$) Stützstellen berechnet. Verwende folgende Parameter: *NX*=100, Δx=1., *u*=10. Die Amplitude der Welle (T_1) sei 10. Das Programm soll Die Zeitreihe *T(x,t)* für *x*=0 und die Zeitpunkte *t*=0, Δt, $2\Delta t, \ldots, 200\Delta t$ mit Δt =1. sowie *T(x,t)* für *t*=0 und

t=199Δt (alle Stützstellen x) herausgeschrieben werden. Plotte Die Zeitreihe und die Wellen (z.B. mit gnuplot).

Erweiterung: Schreibe die gesamte Welle (d.h. alle Stützpunkte) zu jedem Zeitpunkt heraus und plotte ein Hovmöller Diagramm der Welle (z.B. mit Grads)